

**HONORARY DEGREE
SPEECH**

Barcelona, 25th April, 2008

Let me first say how pleased and honoured I am to receive this honorary degree from the Polytechnic University of Catalonia. It continues the collaboration and friendship formed during the European Mathematical Congress held in Barcelona eight years ago. But, beyond this, it recognizes the affinity between Catalonia and Scotland where I now live and work. The history of the two countries, and their strong cultural identities, have close parallels and this was emphasized by the building of the new Scottish Parliament to the design of a famous Catalan architect, Enric Miralles, who sadly died before its completion.

An occasion like the present provides an opportunity for a philosophical reflection on mathematics, the scholarly field to which I have devoted my life. The fundamental question which I want to address is: What is mathematics? We can talk about specific topics like geometry, arithmetic or algebra, we can illustrate it by mentioning famous theorems such as the old one of Pythagoras or the more recent one of “Fermat’s Last Theorem”, but this

**DISCURS DOCTORAT
HONORIS CAUSA**

Barcelona, 25 d’abril de 2008

Deixin-me primer expressar-los com em satisfà i m’honora rebre aquesta distinció de la Universitat Politècnica de Catalunya, que continua la col·laboració i l’amistat que sorgiren durant el Congrés Europeu de Matemàtiques, celebrat a Barcelona fa vuit anys, i que, a més, és un reconeixement a l’afinitat que hi ha entre Catalunya i Escòcia, el lloc on ara visc i treballo. La història de tots dos països i les seves fortes identitats culturals tenen unes grans semblances, fet que ha quedat remarcant amb la construcció del nou Parlament escocès segons el disseny d’un famós arquitecte català, Enric Miralles, que dissortadament morí abans de veure’n la seva compleció.

Una ocasió com aquesta és una bona oportunitat per reflexionar sobre les matemàtiques, el camp d’expertesa al qual he dedicat la vida. Què són les matemàtiques? Aquesta és la qüestió fonamental que vull considerar. Podem parlar de matèries específiques, com ara la geometria, l’aritmètica o l’àlgebra; podem il·lustrar-ho esmentant teoremes famosos com són el vell teorema de Pitàgores o el més recent “darrer teorema de Fermat”, però

merely whets the appetite. It describes but does not define.

això és un mer aperitiu que només descriu, no defineix.

My answer is that mathematics is a language, a specific means of communication and it can usefully be compared with natural language, such as English or Catalan.

La meva resposta és que les matemàtiques són un llenguatge, un mitjà específic de comunicació que es pot comparar profitosament amb els llenguatges naturals, com ara l'anglès o el català. Són constructes culturals que han evolucionat durant milers d'anys i que forneixen el marc de la civilització. Un nadó no parla ni sap matemàtiques. Tanmateix, donat un entorn social apropiat, els capta ràpidament tots dos, cosa que posa de manifest que el cervell humà té la capacitat innata de parlar i comptar. Si bé aquesta capacitat és present, de manera limitada, en molts animals, només l'Homo sapiens ha desenvolupat la capacitat de fer llargs discursos i de demostrar teoremes significatius. Són els trets distintius de la nostra espècie.

All of these are cultural constructs, evolved over thousands of years which provide the framework of civilization. A newly born infant speaks no language and knows no mathematics. However, given the proper social environment, it rapidly picks up both, indicating that the human brain has the innate capacity to speak and count. Although such capacity is, to a limited extent, found in many animals, only homo sapiens has evolved to make long speeches or prove significant theorems. As a species these are our defining characteristics.

It is instructive to compare the prehistory of both language and mathematics. Before the advent of the written word people communicated by speech and this would have included some elementary mathematical concepts. Early man had to fashion tools and would have known the difference between a (round) stone and a (straight) arrow.

És instructiu comparar la prehistòria del llenguatge i de les matemàtiques. Abans de l'escriptura, les persones es comunicaven mitjançant la parla, que devia d'incloure alguns conceptes matemàtics elementals. Els primers humans devien elaborar eines i, així, devien conèixer la diferència entre una pedra (rodona) i una fletxa (recta).

A striking example is provided by the Scotland of 4,000 years ago when life was primitive and no sign of written language has survived. However I was extremely surprised to find out that, at this early time, the 5 Platonic Solids including the most elaborate, the icosahedron, made up of 20 equilateral triangles, were already known. Many stone models of these are to be found all over northern Scotland, indicating a surprising degree of mathematical sophistication.

But it was the emergence of the written word that enabled civilization to make rapid progress. First with pictorial language such as the Egyptian hieroglyphics, moving on eventually to the modern Latin alphabet (though we have to recognize that in Asia, Chinese characters did not hinder civilization).

Mathematics has similarly evolved through the introduction of better notation and symbolism. The Roman Empire managed quite well with what we now call Roman Numerals, but their replacement by the Indo-Arab decimal notation was a giant step forward. I confess I am mystified as to how Roman engineers constructed such magnificent buildings when their arithmetical symbolism was so primitive. Try multiplying some large numbers together using Roman Numerals and you will understand my amazement at Roman achievements.

Un exemple sorprenent s'esdevingué a Escòcia fa 4.000 anys. Si bé la vida era primitiva i no hi ha indicis de llenguatge escrit, em va sorprendre molt descobrir que ja coneixien els cinc sòlids platònics, incloent-hi el més elaborat, l'icosàedre, format per vint triangles equilàters. D'aquests models, se'n troben molts al nord d'Escòcia, cosa que revela un grau sorprenent de sofisticació matemàtica.

Però fou l'emergència de l'escriptura que permeté a la civilització fer un progrés ràpid. Primer amb llenguatges pictogràfics, com són els jeroglífics egipcis, que evolucionaren vers l'alfabet llatí modern (per bé que hem de reconèixer que els caràcters xinesos no van pas frenar la civilització a Àsia).

La matemàtica ha evolucionat d'una manera similar amb la introducció de notacions i simbolismes millors. L'Imperi romà funcionà força bé amb les xifres romanes, però la substitució per la notació decimal àrabica fou un pas de gegant. Confesso que estic desconcertat per la manera com els enginyers romans construïren uns edificis tan magnífics amb un simbolisme aritmètic tan primitiu. Intentin multiplicar nombres grans usant xifres romanes i entendran el meu astorament davant les edificacions romanes.

Interestingly the arrival of the decimal notation in Western Europe, during the Renaissance, almost certainly came through Spain, where the Arab and Latin cultures had, in the early days, such a fruitful encounter, in places such as Toledo. However, in adopting the decimal notation from the Arabs, western countries made a significant error which is not widely recognized. As you know Arabic is written from right to left, so logically, when Europeans adopted Arabic numerals in decimal form, they should have reversed the order. The result of this error is that when we write say the 3 digits 462 we do not know, until we have finished, whether the first digit 4 represents units, tens or hundreds. For the Arab, reading from right to left, there is no such confusion.

Besides comparing the historical evolution of mathematics and natural language we can also compare their functions, describing the variety of usage.

Thus language has a utilitarian use for everyday business, a literary use for conveying more abstract ideas and a poetic use for our emotions. There is a similar division in mathematics between utility, leading to applied mathematics, and pure mathematics, more concerned with abstract ideas.

Curiosament, l'arribada de la notació decimal a l'Europa occidental durant el Renaixement fou, amb molta certesa, a través d'Espanya, on es produí un profitós encontre de les cultures àrab i llatina en llocs com ara Toledo. Tanmateix, en adoptar la notació decimal aràbiga, l'Occident va cometre un error considerable que no es reconeix gaire. Com saben, l'àrab s'escriu de dreta a esquerra i, lògicament, quan els europeus adoptaren les xifres decimals aràbigues n'haurien d'haver invertit l'ordre. El resultat d'aquest error és que quan escrivim tres dígit, com ara 462, no sabem, fins que no acabem, si el primer dígit, 4, representa les unitats, les desenes o les centenes. Per als àrabs, que llegeixen de dreta a esquerra, aquesta confusió no existeix.

A més de comparar l'evolució històrica de les matemàtiques i del llenguatge natural, també podem comparar-ne les funcions, descrivint-ne els diversos usos.

Així, el llenguatge té un ús pràctic per als afers diaris, un ús literari per transmetre idees més abstractes i un ús poètic per expressar les emocions. Hi ha una divisió similar en la matemàtica entre utilitat, que mena a la matemàtica aplicada, i la matemàtica pura, més enfocada a idees abstractes.

At the higher end we find the aesthetic aspect of mathematics where beauty is the guiding light. I will expand on this topic in my lecture at the museum this afternoon.

Let me say, at this stage, that many of my mathematical colleagues are not happy to label mathematics as just a language. Surely, they say, the message is more important than the medium. This is of course true, but the whole point of a flexible language is that it can convey many messages. To compare mathematics with say the English language does not denigrate it. A medium that conveys the thoughts of Shakespeare is one of mankind's highest achievements. The same applies to mathematics, the medium through which we can access the ideas of Gauss.

Let me turn now to the field of education. It is generally recognized that language and mathematics are the two pillars of education. In earlier times language included not just the vernacular (English or Spanish) but also Latin and Greek. These enabled the student to read both the Bible and the classical authors. Moreover the mastery of these difficult languages was regarded as a good training for the mind, and produced not just classical scholars but lawyers, clergymen, doctors and politicians.

A la part superior hi ha l'aspecte estètic de la matemàtica, on la bellesa és la llum que ens guia. Aquesta idea la desenvoluparé aquesta tarda en la meva conferència al Museu.

Deixin que els digui, en aquest punt, que a molts dels meus col·legues matemàtics no els agrada dir que la matemàtica és un mer llenguatge. Diuen que el missatge és, clarament, més important que el mitjà. Ben cert; però cal considerar que un llenguatge flexible pot transmetre molts missatges. Comparar la matemàtica amb l'anglès, posem per cas, no la denigra. Un mitjà que transmet els pensaments de Shakespeare és un dels triomfs més elevats de la humanitat. El mateix val per a la matemàtica, el mitjà amb què podem accedir a les idees de Gauss.

Ara voldria introduir-me en el camp de l'educació. Generalment es reconeix que la llengua i la matemàtica són els dos pilars de l'educació. En altres temps, la llengua que es coneixia no era només la vernacle (l'anglès o l'espanyol), sinó també el llatí i el grec, que facultaven l'estudiant per llegir la Bíblia i els autors clàssics. A més, el domini d'aquestes difícils llengües es considerava un bon entrenament de la ment, amb la qual cosa no sols es formava doctes en els clàssics, sinó també advocats, sacerdots, metges i polítics.

In comparing mathematics with natural language there is of course one notable difference. Despite the diversity of human culture around the world, mathematics is essentially universal. Historical differences between the mathematics of different countries have now disappeared. Chinese mathematics is the same as Spanish mathematics. The same cannot be said of natural language. In scientific circles English is now widely used, and plays the role originally envisaged for the invented language of Esperanto, and this may eventually be overtaken by Chinese, but for the present we prefer linguistic diversity.

En la comparació de la matemàtica amb el llenguatge natural hi ha una diferència notable. Malgrat la diversitat de la cultura humana arreu del món, la matemàtica és essencialment universal. Les diferències històriques entre les matemàtiques dels diferents països han desaparegut. La matemàtica xinesa és la mateixa que l'espanyola, cosa que no es pot dir del llenguatge natural. En àmbits científics s'usa habitualment l'anglès, que fa el paper previst originàriament per al llenguatge artificial que és l'esperanto. Potser algun dia aquest paper el tindrà el xinès, però mentrestant preferim la diversitat lingüística.

We mathematicians use our algebraic symbols because they are more concise than words, but in our thoughts (and even in much of our writing) we use words to convey concepts. If you pick up a mathematical journal you will be surprised to find that symbolism has not completely taken over and that ordinary words predominate. The converse is rare. Books and newspapers will often use numbers but only in a minor way. There is a resistance among non-mathematicians to use formulae. I discovered this once when my college in Oxford was drawing up new statutes and was describing at length how the numbers of different categories of Fellows should be regulated.

Els matemàtics usem els símbols algebraics perquè són més concisos que les paraules, però en els nostres pensaments (i fins i tot en molts dels nostres escrits) usem les paraules per transmetre conceptes. Si agafen una revista matemàtica, se sorprendran de trobar-hi que el simbolisme no se n'hagi apoderat completament i que hi predominin les paraules habituals. A la inversa és diferent. Llibres i diaris sovint usen nombres, però només d'una manera molt reduïda. Hi ha una certa resistència a usar fórmules entre els qui no són matemàtics. Ho vaig descobrir quan el meu centre a Oxford redactava uns nous estatuts. S'hi descrivia detalladament com calia regular el nombre de les diferents categories de Fellows.

I read this with care and realized that I could replace several pages of text by a single formula. Although my colleagues, including the lawyers, recognized the brevity and logic of my formulation they objected to using a symbolic formula, so they translated it back into English taking up several lines but still better than the original version of several pages.

Els vaig llegir amb cura i vaig comprovar que podia canviar diverses pàgines de text per una única fórmula. Si bé els meus col·legues, comptant-hi els advocats, van reconèixer la brevetat i la lògica de la meva formulació, es van oposar a l'ús d'una fórmula simbòlica i la van tornar a transcriure a l'anglès. Els van caldre diverses línies, però almenys el resultat fou millor que l'original.

Perhaps, as an illustration, you will allow me to describe the education of 19th century Cambridge, where mathematics took on the role of the classical languages as the best form of mental training.

Permetin-me, com a il·lustració, descriure l'educació al Cambridge del segle XIX, on les matemàtiques van ocupar el lloc de les llengües clàssiques com la millor forma d'entrenament mental.

Because of the fame and legacy of Isaac Newton, mathematics in Cambridge after his time was given pride of place and it came to dominate the whole educational process. The medieval practice of oral examinations based on the art of rhetoric came to be seen as inappropriate for mathematics. This led to the introduction of written examinations which became highly competitive. Candidates were ranked in strict order of merit with the highest category carrying the title of “wrangler” and the very top individual was named “the senior wrangler”, and was effectively guaranteed fame and fortune.

A causa de la fama i el llegat d'Isaac Newton, es va atorgar a la matemàtica un lloc preeminent, amb la qual cosa va acabar dominant tot el procés formatiu. Es considerà que la pràctica medieval dels exàmens orals basats en l'art de la retòrica era inapropiada per a les matemàtiques, amb la qual cosa s'hi van introduir els exàmens escrits, que van esdevenir molt competitiu. El rànquing de candidats s'ordenava estrictament pels mèrits. Als de la categoria més alta se'ls atorgava el títol de wrangler. El primer d'aquests s'anomenava the senior wrangler i la seva fama i fortuna quedaven efectivament garantides.

These annual competitions were like horse races. The most likely winners were openly discussed in the national press and bets were made on the outcome. The trainers were all important and in Cambridge they were called coaches. I only recently discovered that the word coach, now commonly used in sports such as tennis or football, actually originated in Cambridge student slang. The students saw a parallel between the coach, or carriage, travelling from Cambridge to London and their teachers. Both carriages and students were made to follow a strict path to reach their objective. From mathematics the term coach next spread to the famous Oxford-Cambridge boat race, and from there into sport generally.

The coaches and the examinations dominated the Cambridge scene and much research was first published in form of examination questions. For example a famous theorem in differential geometry, of importance in Physics, known as Stokes' Theorem, made its first appearance in the examination of 1854. That was the year in which the young James Clerk Maxwell (later to become the greatest physicist of his time) took the examination. Rumour has it that he was the only student to successfully solve the problem.

Aquestes conteses anuals eren com curses de cavalls. Dels probables guanyadors se'n parlava obertament a la premsa nacional i s'apostava sobre els resultats. Els preparadors eren primordials i a Cambridge s'anomenaven coaches. No he descobert fins fa poc que coach, paraula que actualment s'usa en esports com ara el tennis o el futbol, prové de l'argot estudiantil de Cambridge. Els estudiants van copsar l'analogia entre el coach, o carruatge, que anava de Cambridge a Londres i els seus professors. Ambdós, carruatges i estudiants, havien de seguir un camí precís per arribar al seu objectiu. Des de les matemàtiques, el mot coach es difongué primer a la famosa cursa de rem Oxford-Cambridge i després als esports en general.

Preparadors i exàmens dominaven l'escenari de Cambridge i una gran part de la recerca es publicà primer en forma de problemes d'examen. Per exemple, un teorema famós de geometria diferencial, que té molta importància en física, conegut com a teorema de Stokes, aparegué primer en l'examen de 1854. Era l'any en què s'examinava el jove James Clerk Maxwell, que més tard esdevindria el físic més gran del seu temps, i es diu que fou l'únic estudiant que el resolgué satisfactòriament.

Incidentally, much of my time and energy over the past few years has been devoted to having a statue of Maxwell erected in the centre of Edinburgh. I hope the statue will be unveiled in November of this year. Edinburgh is already well supplied with statues of famous men such as Adam Smith, the economist, and David Hume, the philosopher. It also has statues of kings, politicians and theologians. But natural science, despite its great importance intellectually and practically, is not recognized. Maxwell will redress the balance. Edinburgh will finally pay homage to its most famous son.

The Cambridge system of training mathematicians by setting challenging examination questions produced a very strong school of mathematical physicists. Felix Klein from Germany was so impressed by the system that he tried to import it into his own country, but transplanting educational practice is as difficult as transplanting botanical specimens; they have to be adapted to the soil, and Klein's attempt failed.

In the 19th century higher education was reserved for men. Later, when women's colleges were founded in Cambridge, the women were allowed to sit the same examinations as the men, and were even inserted into the final order of merit (say between the 15th and 16th wranglers), though they were not given degrees.

A propòsit d'això, deixin-me fer esment que una gran part del temps i l'energia que he esmerçat els darrers anys han estat dedicats a promoure que s'erigís una estàtua de Maxwell al centre d'Edimburg. Espero que serà descoberta el proper novembre. Edimburg ja està prou ben proveïda d'estàtues d'homes famosos, com ara Adam Smith, l'economista, i David Hume, el filòsof. També té estàtues de reis, polítics i teòlegs. Però la ciència natural, tot i la seva gran importància intel·lectual i pràctica, mai no ha estat reconeguda. Maxwell redreçarà la balança. Edimburg per fi retrà homenatge al seu fill més famós.

El sistema de Cambridge de preparar matemàtics proposant-los problemes d'examen desafiadors, produí una escola de físics matemàtics de primera línia. Impressionat per aquest sistema, Felix Klein intentà importar-lo al seu país, Alemanya. Trasplantar pràctiques educatives, però, és tan difícil com trasplantar espècimens botànics, s'han d'adaptar al sòl, i la temptativa de Klein fracassà.

Al segle XIX l'educació superior estava reservada als homes. Més tard, quan a Cambridge es van fundar escoles femenines, es permetia a les dones fer els mateixos exàmens que els homes, i fins i tot els seus noms apareixien en el rànquing final (entre el quinzenè i setzè lloc, per exemple), però no se'ls atorgava cap titulació.

In 1890 a remarkable thing happened, a woman named Phillipa Fawcett was ranked **above** the Senior Wrangler. This created a national sensation with front-page articles in the newspapers and extravagant celebrations in Cambridge. But it was not until 1945 that Cambridge finally awarded degrees to women.

In conclusion let me just say how much I have enjoyed being a mathematician, partaking of a cultural experience that is so extensive, beautiful and universal. In particular I have made contact with mathematicians all over the world, including in particular Barcelona. I thank you once again for bestowing on me the degree of your University, *honoris causa*.

Michael Atiyah

L'any 1890 es produí el fet remarkable que una dona, Phillipa Fawcett, es classificà més bé que el primer de la promoció, cosa que produí notícies sensacionals a les primeres pàgines dels diaris i celebracions extravagants a Cambridge. Però no fou fins a 1945 que finalment Cambridge atorgà titulacions a les dones.

Per concloure, deixin-me dir-los com m'ha delectat ser un matemàtic, participant d'una experiència cultural tan extensa, bella i universal. En particular he fet contactes amb matemàtics d'arreu del món, incloent-hi Barcelona. Els agraeixo de nou haver-me atorgat el títol de doctor honoris causa de la seva universitat.

Michael Atiyah